

L3MPC Examen de Mécanique Quantique

Session 2 - 3 juin 2009

Aucun document n'est autorisé

Calculatrices interdites

I Diffraction de neutrons et principe d'incertitude

On considère une expérience moderne de diffraction de neutrons réalisée en 1988 utilisant un système à simple fente et double fentes. Dans cette expérience, les neutrons sont produits lors de la fission du noyau d'uranium 235 puis guidés vers le site de l'expérience. Ces neutrons sont refroidis à l'aide de deutérium liquide et leur longueur d'onde est finalement $\lambda = 20 \text{ \AA}$.

a. On interpose sur le trajet du faisceau de neutrons un système de deux fentes de largeurs finies a (dans le plan (xOy) , éloignées de $93 \text{ }\mu\text{m}$). On détecte l'image résultante à 5 m à l'aide d'un système de détection au fluorure de bore. Le système expérimental est agencé de sorte que chaque neutron arrive *isolément* dans le détecteur, le suivant étant encore dans le réacteur contenant l'uranium. Expliquer que l'image détectée soit une figure d'interférences.

b. On place un écran *totalement opaque* devant l'une des deux fentes. Quel type d'image observe-t-on ? L'axe des x est orienté dans le plan de la fente, perpendiculairement à celle-ci. Considérer la largeur de la fente a et la composante suivant x , p_x , de l'impulsion \mathbf{p} des photons pour retrouver géométriquement le principe d'incertitude de Heisenberg liant ici l'incertitude sur x et celle sur p_x .

II Noyau de deutérium dans un champ magnétique.

Le noyau de deutérium plongé dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} possède trois états d'énergie notés $\{|\psi_+\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_-\rangle\}$, d'énergies respectives $E_0, 0, -E_0$, avec $E_0 > 0$. Ce noyau a un moment magnétique. On suppose que l'observable \hat{M} associée à la projection de ce moment magnétique sur une direction fixe perpendiculaire au champ appliqué \vec{B} a la forme $\hat{M} = \mu_0 \hat{A}$, avec μ_0 une constante positive et \hat{A} un opérateur défini par :

$$\hat{A}|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_0\rangle, \quad \hat{A}|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle], \quad \hat{A}|\psi_-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_0\rangle$$

- a) Montrer que, dans la base $\{|\psi_+\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_-\rangle\}$, les matrices associées à l'opérateur hamiltonien du système \hat{H} et à l'opérateur \hat{A} ont la forme suivante :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) En utilisant l'équation caractéristique $\det[A - aI] = 0$, calculer les valeurs propres a_1 , a_2 et a_3 de \hat{A} et les vecteurs propres normalisés correspondants $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ et $|\varphi_3\rangle$, en ordonnant les valeurs propres $a_1 > a_2 > a_3$. Déduire ensuite les valeurs propres m_1 , m_2 et m_3 et les vecteurs propres de \hat{M} .
- c) On suppose qu'à $t = 0$ l'état du système est $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_+\rangle + \sqrt{2}|\psi_0\rangle + |\psi_-\rangle)$. Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle E \rangle = \langle \psi(0) | \hat{H} | \psi(0) \rangle$ ainsi que l'écart quadratique moyen $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$ dans cet état.
- d) En utilisant l'équation de Schrödinger dépendante du temps, montrer que l'expression de $|\psi(t)\rangle$ à un instant ultérieur $t > 0$ est :
- $$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(|\psi_+\rangle e^{-i\omega t} + \sqrt{2}|\psi_0\rangle + |\psi_-\rangle e^{+i\omega t} \right) \text{ avec } \omega = E_0 / \hbar.$$
- e) Calculer, à l'instant t , la valeur moyenne $\langle M \rangle = \langle \psi(t) | \hat{M} | \psi(t) \rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$ déterminé ci-dessus.
- f) Quelles sont les probabilités de trouver m_1 , m_2 et m_3 à l'instant t lors d'une mesure de M sur $|\psi(t)\rangle$?