

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES – LICENCE M.P.C. 3^{ème} ANNÉE
5^{ème} SEMESTRE, 1^{ère} SESSION

14 janvier 2009

Durée : 2 heures

Barème : 20 points

Documents autorisés : le cours polycopié

Bédoules électroniques autorisés : calculatrice graphique

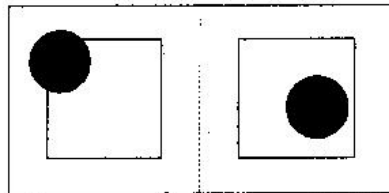
Enseignant référent : Y. Genzmer

Exercice 1. (5 pts) Résoudre dans \mathbb{R} le système différentiel

$$\begin{cases} -x(t) - y(t) = \dot{x}(t) \\ 4x(t) - y(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$ et $y(0) = 4$.

Exercice 2. (3 pts) On considère un disque de rayon 1 que l'on jette aléatoirement dans un carré de côté 4. On suppose que le centre du disque reste à l'intérieur du carré (voir figure). Déterminer la probabilité p que le disque rencontre le bord du carré.



Problème. (14 pts)

(1) (5 pts) Une formule cathodine (c'est-à-dire pas anodine).

(a) Démontrer la relation $\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos(u - v) + \cos(u + v))$. Déterminer alors, pour $a \notin \mathbb{Z}$ fixé, la série de Fourier de la fonction

$$f_a : t \in [-\pi, \pi] \mapsto \cos(at) .$$

(b) En déduire l'égalité

$$\pi \frac{\cos(\pi a)}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 - a^2} .$$

- (2) (3 pts) **Produits infinis.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On considère, pour $N \in \mathbb{N}$, le produit partiel de rang N défini par $P_N := \prod_{n=0}^N a_n = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_N$. On dit que le produit infini

$$P = \prod_{n=0}^{+\infty} a_n$$

converge si $\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N = \lambda$ existe et si $\lambda \neq 0$.

- (a) Montrer que le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergent si, et seulement si, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \log a_n$ est convergente. On démontrera que dans ce cas

$$\log \lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \log a_n.$$

- (b) Montrer que si le produit infini converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. Donner un exemple soulignant que la réciproque est fausse.
 (c) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ et $a \in]-1, 1[$. Montrer que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + an^{-\alpha})$ est convergent si, et seulement si, $\alpha > 1$. On pensera à justifier que $a_n := 1 + an^{-\alpha}$ est strictement positif.

- (3) (6 pts) **Application.** Pour $x \in]-1, 1[$ on forme le produit infini

$$P(x) := \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

- (a) Montrer que $P(x)$ est convergent.
 (b) On pose $\varphi(x) := \log P(x)$. Montrer que φ se dérive terme à terme et établir l'égalité

$$\varphi'(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

On pourra pour cela montrer que la série ci-dessus converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-r, r]$ avec $0 < r < 1$.

- (c) Démontrer alors qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\varphi(x) = C + \log \sin(\pi x) - \log x.$$

- (d) En passant à la limite $x \rightarrow 0$ trouver la valeur de C . En déduire finalement que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$P(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

- (e) (Bonus : +2pts) Établir également la formule

$$\cos(\pi x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}\right)$$

(on pourra se servir de la formule du sinus de l'angle double).