

EXAMEN de MECANIQUE QUANTIQUE
Licence Mathématiques-Physique-Chimie (Resp. A. Bieber)
Durée 2h00, aucun document autorisé

Exercice I :

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω . A l'instant $t = 0$, l'état de cette oscillation est donné par $|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ où les $|n\rangle$ sont les états stationnaires

d'énergie $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une mesure d'énergie donne un résultat plus grand que $2\hbar\omega$?

Si cette probabilité est nulle quels sont les coefficients c_n non nuls ? On supposera dans la suite que cette condition est réalisée.

2) Ecrivez la condition de normalisation de $|\Psi(0)\rangle$ en fonction de ces coefficients, ainsi que la valeur moyenne de l'énergie $\langle E \rangle = \langle \Psi(0) | H | \Psi(0) \rangle$.

Si $\langle E \rangle = \hbar\omega$, calculez $|c_0|^2$ et $|c_1|^2$.

3) On prend c_0 réel positif et on pose $c_1 = |c_1| \cdot e^{i\theta}$. La condition $\langle E \rangle = \hbar\omega$ est toujours réalisée

et de plus la position initiale est telle que $\langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculez θ .

4) $|\Psi(0)\rangle$ étant connu, écrivez $|\Psi(t)\rangle$ et calculez θ à l'instant t . En déduire la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ de la position à l'instant t .

Exercice II :

Dans un mouvement à 1 dimension x , l'opérateur parité \hat{P} est défini dans la représentation $\{|x\rangle\}$ par $\hat{P}|x\rangle = |-x\rangle$.

1) Préciser les propriétés mathématiques des vecteurs kets $|x\rangle$. Quelle est l'interprétation physique de ces vecteurs ?

2) Vérifier les propriétés suivantes : $\hat{P} = \hat{P}^+$, $\hat{P}^2 = \hat{1}$. En déduire que les valeurs propres de l'opérateur parité sont +1, -1 et que les fonctions d'onde associées aux vecteurs propres correspondants sont respectivement paires ou impaires.

3) Montrer que $\hat{P}\hat{x}\hat{P} = -\hat{x}$.

4) La particule est supposée évoluer dans une énergie potentielle $V(x)$ paire. Montrer que son opérateur Hamiltonien \hat{H} commute avec l'opérateur parité \hat{P} . Que peut-on en conclure ?

Exercice III :

On considère les états d'un électron dans une molécule triatomique linéaire A-B-C formée d'atomes A, B, C. Les distances BA et BC sont égales et notées d . On désigne par $|\Psi_A\rangle, |\Psi_B\rangle, |\Psi_C\rangle$ les états propres d'une observable \hat{O} correspondant à l'électron localisé respectivement au voisinage des atomes A, B et C :

$$\hat{O}|\Psi_A\rangle = -d|\Psi_A\rangle, \quad \hat{O}|\Psi_B\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{O}|\Psi_C\rangle = d|\Psi_C\rangle$$

Dans la base orthonormée $\{|\Psi_A\rangle, |\Psi_B\rangle, |\Psi_C\rangle\}$, l'opérateur Hamiltonien est supposé représenté par la matrice suivante :

$$\hat{H} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_0 & -a & 0 \\ -a & E_0 & -a \\ 0 & -a & E_0 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ est un réel positif.}$$

1) Calculer les niveaux d'énergie et les états propres de \hat{H} .

2) Quelles sont les probabilités de trouver l'électron en A, B, C dans l'état fondamental ?

3) On considère un électron dans l'état $|\Psi_B\rangle$ et on mesure l'énergie. Que peut-on trouver et avec quelle probabilité ?