

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES – LICENCE M.P.C. 3^{ème} ANNÉE
5^{ème} SEMESTRE, 1^{ère} SESSION

22 janvier 2008

Durée : 2 heures

Barème : 100 points

Documents autorisés : aucun

Bidules électroniques autorisés : calculatrice graphique

Enseignant référent : L. Teyssier

Exercice 1. (20 pts) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = 2xe^x$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2. (20 pts) Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction

$$x \in [0, \pi] \mapsto 1$$

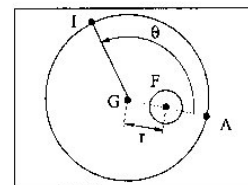
$$x \in [-\pi, 0] \mapsto -1.$$

Calculer alors une valeur de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-2} près. On montrera en particulier que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| < \frac{1}{4N+3}$$

et on spécifiera le nombre de termes retenus pour le calcul de la valeur approchée.

Exercice 3. (30 pts) C'est l'épiphanie! On veut déterminer la probabilité de tomber sur la fève avec le couteau en coupant la galette (toujours rageant...). Cette dernière est assimilée à un disque de rayon 1 de centre G , et la fève à un disque de rayon $0 < \rho < \frac{1}{2}$ de centre F . On fixe un point A sur le bord de la galette qui va servir de point de référence pour mesurer les angles. On place aléatoirement la fève sur le rayon $[G, A]$: on spécifie donc la distance $r = GF \in [0, 1 - \rho]$ du centre de la fève au centre de la galette. Un coup de couteau sera assimilé à un rayon $[G, I]$ et sera repéré par l'angle $\theta = \widehat{AGI} \in [-\pi, \pi]$. Un événement élémentaire correspond dans ce modèle au choix équiprobable d'un couple (θ, r) .



- (1) On note Ω l'univers dans le plan $\mathbb{R}^2 = \{(\theta, r)\}$ (ce n'est pas le plan dans lequel se situe la galette!). Tracer et calculer l'aire de Ω .
- (2)
 - (a) Étant donné r avec $r > \rho$, déterminer l'intervalle des angles θ pour lesquels le coup de couteau correspondant rencontre la fève. On tracera une figure pour illustrer le raisonnement et on se souviendra que la tangente à un cercle est orthogonale au rayon.
 - (b) Même question quand $r \leq \rho$.
 - (c) Représenter alors dans le plan $\{(\theta, r)\}$ l'évènement \mathcal{C} : « le couteau rencontre la fève ».
- (3) Montrer que la fonction $\theta \mapsto \ln \tan \frac{\theta}{2}$ est une primitive de $\theta \mapsto \frac{1}{\sin \theta}$ pour $\theta > 0$.
- (4) Déterminer finalement la probabilité $p(\mathcal{C})$ cherchée ; on notera $\alpha := \arcsin \frac{\rho}{1-\rho}$. Donner une valeur approchée quand $\rho = \frac{1}{8}$.

Quand la clochette tinte, tournez la page...

Problème. (40 pts) Le but de ce problème est de décrire une méthode pour calculer la somme d'une série entière de la forme

$$S_P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$$

où $P(t)$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé.

- (1) Supposons que $d = 0$. Donner alors la valeur de S_P .
- (2) On suppose maintenant d quelconque. Montrer que le rayon de convergence de la série S_P est 1.
- (3)

- (a) Calculer par récurrence la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
- (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

- (4) On note E_d l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus d , muni de la base canonique $Q_k(t) = t^k$ pour $0 \leq k \leq d$. Soit $P_k(t)$ le polynôme

$$P_k(t) := t(t-1)\cdots(t-(k-1)) \text{ si } k > 0, \quad P_0(t) := 1.$$

- (a) Justifier que, pour $|x| < 1$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E_d &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto S_P(x) \end{aligned}$$

est linéaire.

- (b) Quel est le degré de P_k ? Donner la valeur de $\varphi_x(P_k)$.
- (c) Soit M la matrice carrée dont la $j^{\text{ième}}$ colonne représente les composantes de P_j dans la base $(Q_k)_{0 \leq k \leq d}$. Montrer que M est triangulaire et calculer le déterminant de M .
- (d) En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq d}$ est une base de E_d .
- (5)

- (a) En écrivant $P(t) = \sum_{k=0}^d b_k P_k(t)$ donner la valeur de S_P en fonction de la matrice ligne

$$S(x) := [\varphi_x(P_0) \cdots \varphi_x(P_d)] \text{ et de la matrice colonne } \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix}.$$

- (b) Finalement écrire $P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ et donner la valeur de S_P en fonction de M , S et $\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}$.

- (6) Application. En utilisant la méthode présentée ci-dessus montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1) x^n = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}.$$

(On cherchera directement à décomposer $t^2 + t + 1$ dans la base $P_k(t)$.)