

**EXAMEN**  
**L2-MPC S3 13/01/09**

*Les bidules électroniques sont interdits. Les résumés polycopiés de cours sont autorisés mais en général inutiles. La difficulté des questions est approximativement croissante.*

**Première partie 1. Exercices**

**1. INTÉGRALE DOUBLE.**

- (1) Vérifier que  $\frac{r^2}{1+r^2} = 1 - \frac{1}{1+r^2}$ .
- (2) Soit  $D$  le domaine  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Dessiner  $D$ . En effectuant un changement de variable approprié, montrer que

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy = 1 - \frac{\pi}{4}$$

**2. FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE.**

Soit  $F$  la fonction définie par l'intégrale

$$F(x) = \int_0^\infty \cos(t) e^{-t^2 x} dt.$$

- (1) Montrer que l'intégrale est convergente pour  $x > 0$ .
- (2) Est-elle convergente pour  $x = 0$ ? Pourquoi?
- (3) Vérifier que  $F'(x) = -\int_0^\infty t \cos(t) t e^{-t^2 x} dt$ .
- (4) Vérifier que  $\frac{\partial}{\partial t} (e^{-t^2 x}) = -2x \cdot t e^{-t^2 x}$ . En déduire en effectuant deux intégrations par parties, montrer que

$$F'(x) = \left( \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right) F(x)$$

En admettant que  $\int_0^\infty \cos(t) e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}$ , calculer la valeur exacte de  $F$ .

**Deuxième partie 2. Problème**

Dans le problème suivant, on demande que, sauf mention du contraire, tous les dessins soient réalisés sur une même figure, éventuellement sur une feuille à part.

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = \sin(t \times y(t))$$

Le but du problème est de dessiner l'allure de quelques solutions.

On note  $y_\Delta$  la solution maximale de l'équation (E) telle que  $y_\Delta(0) = \Delta$ .

**3. GÉNÉRALITÉS.**

- (1) Montrer que  $y_\Delta$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .
- (2) Déterminer et représenter la solution stationnaire. Montrer que si  $\Delta > 0$  alors  $y_\Delta$  est strictement positive sur tout  $\mathbb{R}$  et que si  $\Delta < 0$  alors  $y_\Delta$  est strictement négatif sur tout  $\mathbb{R}$ .
- (3) On pose  $z_1(t) = -y_\Delta(t)$ . Montrer que  $z_1(t)$  est solution de (E). En déduire que  $y_{-\Delta} = -y_\Delta$ . Quelle opération géométrique transforme le graphe de la solution  $y_\Delta$  en celui de la solution  $y_{-\Delta}$ ? On pose  $z_2(t) = y_\Delta(-t)$ . Montrer que  $z_2(t)$  est solution de (E). En déduire que la fonction  $y_\Delta$  est paire.

Désormais on suppose que  $\Delta \geq 0$  et on restreint l'étude des solutions aux valeurs de  $t \geq 0$ .

- (4) Montrer que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$   $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ . Montrer que pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\Delta, \Delta' \geq 0$ ,  $|\gamma'_\Delta(t) - \gamma'_{\Delta'}(t)| \leq t |\gamma_\Delta(t) - \gamma_{\Delta'}(t)|$ . En déduire que pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\Delta, \Delta' \geq 0$

$$|\gamma_\Delta(t) - \gamma_{\Delta'}(t)| \leq |\Delta - \Delta'| e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Montrer alors que pour tout  $t \geq 0$ , on a la limite suivante

$$\gamma_\Delta(t) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta'} \gamma_{\Delta'}(t).$$

#### 4. COURBES ISOCLINES.

- (1) Soit pour  $k$  est un entier quelconque la fonction définie par  $\text{Iso}_k(t) = \frac{k\pi}{t}$ . Montrer que  $\text{Iso}_k(t)$  est une courbe de tangence horizontale et que la réunion de toutes ces courbes et de l'axe des ordonnées constituent toutes les courbes de tangence horizontale. Dessiner l'allure des courbes de tangence horizontale pour  $k = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ .
- (2) Représenter les domaines de croissance et de décroissance en inscrivant le symbole « + » dans les domaines de croissance et le symbole « - » dans les domaines de décroissance.
- (3) Montrer  $t \mapsto \text{Iso}_k(t)$  est une barrière inférieure pour  $t > 0$ .

#### 5. OSCILLATION DES SOLUTIONS.

Pour  $\Delta > 0$ , on appelle  $N(\Delta)$  le nombre de fois que la solution  $y_\Delta$  traverse les courbes de tangence horizontale pour  $t > 0$ .

- (1) Dans cette question, n'hésitez pas à faire des petits dessins à part. En utilisant la représentation des courbes de tangence horizontale, montrer que pour tout  $\Delta$ ,  $N(\Delta)$  ne peut pas être nul. Montrer de même que  $N(\Delta)$  ne peut pas être un nombre pair.
- (2) Pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose

$$\beta_k(t) = \frac{2k\pi}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

lorsque  $t$  tend vers l'infini. En écrivant la condition de barrière supérieure sur  $\beta_k$ , montrer que pour tout  $k$ , il existe  $t_k$  tel que  $\beta_k(t)$  soit strictement positif et une barrière supérieure pour  $t > t_k$ . On ne demande pas dans cette question de préciser la valeur de  $t_k$ .

- (3) Dans cette question on se propose d'étudier l'existence de solutions  $y_\Delta$  telles que  $N(\Delta) = 1$ .
  - (a) Dessiner sur le même dessin que précédemment l'allure de  $\beta_1$ .
  - (b) Montrer que  $y_\Delta(t_1 + 1)$  tend vers 0 lorsque  $\Delta$  tend vers 0. En déduire qu'il existe  $\Delta_1 \neq 0$  tel que  $y_{\Delta_1}(t_1 + 1) < \beta_1(t_1 + 1)$ .
  - (c) En déduire que  $N(\Delta_1) = 1$ .
  - (d) Dessiner l'allure du graphe de  $y_{\Delta_1}$  sur tout  $\mathbb{R}$ . Montrer en particulier que  $y_{\Delta_1}(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
- (4) Dans cette question, on pourra à nouveau faire quelques petits dessins convaincants accompagnés d'explications. Montrer que pour tout  $0 < \Delta < \Delta_1$ ,  $N(\Delta) = 1$ . Montrer par ailleurs qu'il existe forcément une valeur de  $\Delta_2$  telles que  $N(\Delta_2) > 1$  et montrer que si  $\Delta > \Delta_2$  alors  $N(\Delta) > 1$ .

Soit  $\Delta^1$  la plus grande valeur telle que pour tout  $0 < \Delta < \Delta^1$ ,  $N(\Delta) = 1$ .

- (5) Dans cette question, on se propose de montrer la propriété suivante :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une suite strictement croissante de réels  $\{\Delta^k\}_{0 \leq k \leq n+1}$  avec  $\Delta^0 = 0$  telle que pour tout  $\Delta \in ]\Delta^k, \Delta^{k+1}[$ ,  $N(\Delta) = 2k + 1$  et pour tout  $\Delta > \Delta^{n+1}$ ,  $N(\Delta) > 2n + 3$ .

- (a) Montrer que la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .
- (b) Montrer que pour tout  $t > 0$  assez grand,  $y_{\Delta^{n+1}}(t) < \beta_{n+1}(t) < \beta_{n+2}(t)$ . Un bon dessin des positions relatives de  $y_{\Delta^{n+1}}$ ,  $\beta_{n+1}$  et  $\beta_{n+2}$  accompagné de quelques explications peut suffire.
- (c) On suppose la propriété vraie au rang  $n$ . Montrer que pour tout  $t$

$$y_\Delta(t) \longrightarrow y_{\Delta^{n+1}}(t)$$

lorsque  $\Delta$  tend vers  $\Delta^{n+1}$ . En déduire qu'il existe  $\Delta_{n+2} > \Delta^{n+1}$  tel que  $y_{\Delta_{n+2}}(t_{n+2} + 1) < \beta_{n+2}(t_{n+2} + 1)$ .

- (d) Déduire des questions précédente que  $N(\Delta_{n+2}) = 2n + 5$ .
  - (e) Comment alors choisir  $\Delta^{n+2}$  pour que la propriété soit vraie au rang  $n + 1$  ?
  - (f) En déduire alors la propriété recherchée.
- (6) Représenter enfin l'allure de deux solutions  $y_\Delta$  avec  $0 < \Delta < \Delta^1$  et deux solutions avec  $\Delta^1 < \Delta < \Delta^2$ .
  - (7) ( Question ouverte et subsidiaire ) Existe-t-il  $\Delta$  tel que  $N(\Delta) = \infty$  ?