

Aucun document n'est autorisé

1. Mécanique lagrangienne et hamiltonienne [12]

Une bille de masse m soumise à la gravité, glisse sans friction sur une courbe verticale qui a la forme d'une cycloïde, donnée par l'équation paramétrique

$$x = a(\theta - \sin \theta), z = a(1 + \cos \theta),$$

où $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Le mouvement $\theta(t)$ est donc à une dimension, le long de la courbe de coordonnées cartésiennes x et z . La force de gravité $mg\mathbf{k}$ est dirigée le long de Oz .

- Esquisser la courbe $z(x)$, en notant les points particuliers $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$, et la symétrie de z autour de $\theta = \pi$.
- Donner les composantes de la vitesse dx/dt , dz/dt , en fonction de la coordonnée généralisée θ et de sa vitesse $d\theta/dt$.
- Ecrire l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le lagrangien.
- Ecrire les équations du mouvement (équations de Lagrange)
- Quelle est la position d'équilibre de la bille ?
- Donner le moment généralisé p conjugué à la variable θ .
- On fait le changement de variable $Q = \cos(\theta/2)$. Calculer dQ/dt . Exprimer le lagrangien en fonction des nouvelles variables Q et dQ/dt .
- Donner le moment généralisé P conjugué à la variable Q , et le hamiltonien $H(P, Q)$.
- Donner les équations du mouvement de Hamilton pour les nouvelles variables, et en déduire (par analogie ou par calcul) leur solution $Q(t)$, $P(t)$, et la période du mouvement de la bille. Est-ce que cette période dépend de l'amplitude du mouvement ? De la masse de la bille ?
- Donner les fonctions $P(p, \theta)$ et $Q(p, \theta)$. Montrer que la transformation $Q(p, \theta)$, $P(p, \theta)$ est canonique.
- Vérifier que $dH/dt = 0$. H est donc une constante du mouvement. A quelle quantité physique conservée correspond-il ?

[On a : $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$, $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$]

Tourner la page

2. Mécanique de Newton [8] : Un pendule est constitué d'un fil de masse négligeable de longueur l et d'une masse M . L'accélération de la pesanteur est notée g . Il est initialement au repos, vertical. Ce pendule est heurté horizontalement par une masse m à la vitesse v_0 . Le module de l'accélération de la pesanteur est noté g .

- a) Le choc est élastique. Quelles (2) quantités sont conservées au cours du choc (ayant la même valeur juste avant et juste après le choc) Donner la vitesse du pendule juste après le choc. A quelle hauteur h_1 le pendule va-t-il remonter ?
- b) Le choc est mou (le projectile reste encastré dans la masse du pendule, qui a alors une masse $(M+m)$) Quelle quantité est conservée au cours du choc ? Donner la vitesse du pendule juste après le choc. A quelle hauteur h_2 le pendule va-t-il remonter ?
- c) Quelle proportion de l'énergie initiale est dissipée lors du choc mou ? Lors du choc élastique ?
- d) Ecrire l'équation du mouvement (Newton II) du pendule après le choc. Quelle est la période d'oscillation du pendule (petites oscillations) ? Est-elle dépendante de la masse du pendule ? Comparer avec les réponses a) et b). Expliquer en quelques mots les différences (s'il y en a).

3. Question courte [2] : Considérer le mouvement de la terre autour du soleil. Il y a 3 ou 2 jours de plus entre l'équinoxe de printemps (15 mars) et l'équinoxe d'automne (15 septembre) qu'entre le 15 septembre et le 15 mars. Dire ce que ça implique sur la trajectoire de la terre autour du soleil, et la distance terre-soleil (en précisant la/les loi(s) de Képler ou la symétrie impliquant la conservation d'une quantité).