

# EXAMEN 2ÈME SESSION

L2-MPC S3

L'E 02/06/09

Les bidules électroniques sont interdits. Les résumés photocopiés de cours sont autorisés mais en général inutiles.  
Le barème est indicatif.

**Exercice 1.** (3 points) Factoriser le polynôme  $x^5 - x^4 + x^3 - x^2$ . Calculer une primitive de la fonction suivante  $x \mapsto \frac{3x^4 - x^3 + x - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}$ .

**Exercice 2.** (7 points) Soit  $D_{a,b}$  l'ensemble des points  $(x, y)$  avec  $x > 0$  et  $y > 0$  vérifiant  $y > \frac{1}{x}$  et  $y < ax + b$ .

- (1) Représenter les courbes  $y = \frac{1}{x}$  et  $y = 3 - x$ . Dessiner alors  $D_{-1,3}$ .
- (2) Plus généralement, dessiner l'allure  $D_{a,b}$ . Vérifier que  $D_{a,b}$  est non vide si et seulement si le système

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

admet au moins deux solutions strictement positive. En déduire que  $D_{a,b}$  est non vide si et seulement si les conditions

suivantes sont satisfaites  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \\ b^2 + 4a \geq 0 \end{cases}$ . Que se passe-t-il si  $b^2 + 4a = 0$ ?

- (3) Déterminer les fonctions bordantes de  $D_{a,b}$ .
- (4) Montrer que

$$\iint_{D_{a,b}} dx dy = \ln \left( \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{b + \sqrt{b^2 + 4a}} \right) - \frac{b\sqrt{b^2 + 4a}}{2a}$$

**Exercice 3.** (10 points) Le but de cet exercice est l'étude de l'équation différentielle

$$E_a : \begin{cases} y'(t) = y(t) - y^2(t) + a^2 t^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $a$  est un paramètre.

- (1) Pour quelles valeurs de  $a$ , l'équation  $E_a$  admet-elle des solutions stationnaires? Quelles sont alors ces solutions stationnaires?
- (2) On suppose désormais que  $a \neq 0$ .
  - (a) Résoudre en  $y$  l'équation  $y - y^2 + a^2 t^2 = 0$ .
  - (b) En déduire que la courbe de tangence horizontale de  $E_a$  est la réunion de deux courbes  $\phi_-(t)$  et  $\phi_+(t)$  avec  $\phi_-(t) \leq 0$  et  $\phi_+(t) \geq 1$ . Montrer que ces deux fonctions sont paires et que  $\phi_-(t) + \phi_+(t) = 1$ . Comment déduire le graphe de  $\phi_-$  de celui de  $\phi_+$ ?
  - (c) Montrer que

$$\begin{aligned} \phi_+(t) &\geq 2at + \frac{1}{2} \text{ et } \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_+(t) - \left(2at + \frac{1}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

En déduire l'équation des droites asymptotes aux courbes de  $\phi_+(t)$  et  $\phi_-(t)$ .

- (d) Pour  $a = \frac{1}{2}$ , dessiner les courbes de tangence horizontales et leurs asymptotes et représenter les domaines de croissance et décroissance.
- (3) Montrer que pour  $t \geq 0$ , la fonction  $\phi_+$  est une barrière supérieure et que pour  $t \leq 0$  la fonction  $\phi_-$  est une barrière inférieure. En déduire que les solutions de  $E_a$  telles que  $y(0) = y_0 \in [0, 1]$  sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ . Montrer enfin que ces solutions tendent vers  $\pm\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . Pour cette dernière question, on pourra utiliser le fait suivant : si  $y$  est monotone au voisinage de  $+\infty$  et si elle admet une limite finie en  $+\infty$  alors  $y'$  tend vers 0.
- (4) Soit  $y$  une solution de  $E_a$ . Montrer que  $z(t) = 1 - y(-t)$  est aussi solution  $E_a$ . Montrer alors que le graphe de la solution de  $E_a$  avec  $y(0) = 1 - y_0$  est l'image du graphe de la solution de  $y(0) = y_0$  par la symétrie centrale de centre  $(0, \frac{1}{2})$ . En déduire que le graphe de la solution avec  $y(0) = \frac{1}{2}$  est symétrique par rapport au point  $(0, \frac{1}{2})$ .
- (5) Déterminer l'unique réel positif  $\alpha$  tel que l'équation  $E_a$  ait pour solution une droite d'équation  $y(t) = \alpha t + \frac{1}{2}$ . Sur un graphique, représenter les courbes de tangence horizontale, les domaines de croissance et de décroissance, la solution  $y(t) = \alpha t + \frac{1}{2}$  et l'allure possible de quelques autres solutions.