

00120/137.04-EL
17/01 gh

Université Louis Pasteur
Licence L2, MCP
UE 25 : Mécanique

Session de janvier 2009

Aucun document n'est autorisé

1. Mécanique lagrangienne et hamiltonienne [12]

On cherche à déterminer les fréquences des modes d'oscillations longitudinales (à une dimension) d'une molécule biatomique de type CO. La molécule est modélisée par deux atomes, de masses m_1 et m_2 , positions x_1 et x_2 , reliés par un ressort de raideur k et de longueur d'équilibre a (La force entre les atomes est donc $k(x_2 - x_1 - a)$ en module).

- a) Écrire l'énergie potentielle et vérifier Newton III
- b) Écrire l'énergie cinétique et le lagrangien
- c) Écrire les équations du mouvement (Euler-Lagrange = EL)*
- d) Donner les moments p_2 et p_1 conjugués à x_2 et x_1
- e) Écrire le hamiltonien $H(x_1, p_1, x_2, p_2)$ et les équations de Hamilton
- f) Donner deux constantes du mouvement (démonstration non demandée)

On cherche un changement de variables canoniques de x_1, p_1, x_2, p_2 à Q, P et q, p , avec $P = p_1 + p_2$, $q = x_2 - x_1 - a$ (1) et telle que $Q = \alpha x_1 + \beta x_2$, $p = \gamma p_1 + \delta p_2$ (2).

- g) Calculer les crochets de Poisson $[P, Q]$, $[P, p]$, $[P, q]$, $[p, Q]$, $[p, q]$ et $[q, Q]$, et donner $[P, P]$, etc. [Un peu long. Commencer par calculer $\partial P / \partial p_1$, $\partial P / \partial x_1$, etc.]
- h) Quelles sont les conditions sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que la transformation (1-2) soit canonique ? [On peut poser $\alpha = m_1/M$, avec $M = m_1 + m_2$ et $\mu = m_1 m_2 / M$].
- i) Écrire le hamiltonien $H(P, p, Q, q)$ en ces nouvelles variables. Montrer qu'il est celui de deux oscillateurs harmoniques découplés.
- j) Résoudre les équations du mouvement de Hamilton et obtenir les deux fréquences d'oscillation (l'une d'elles peut être 0).*
[Il est utile d'inverser la transformation (1-2) :
$$p_1 = [\delta P - p] / (\delta - \gamma), p_2 = [-\gamma P + p] / (\delta - \gamma).$$
- k) Cas particuliers : $m_1 \gg m_2$ et $m_1 = m_2$ (molécule symétrique) Montrer que la fréquence d'oscillation de la molécule symétrique est maximale (pour M donné).*
- l) Justifier *a posteriori* le choix (1)

[*Les réponses à j) et k) peuvent être obtenues de c) directement, sans passer par g), h) et i)],

Tourner la page

2. Mécanique de Newton [8]

On considère une planète de masse m , en orbite à distance r autour d'une étoile de masse M , fixée à l'origine O .

- Donner l'énergie potentielle de gravitation $V(r)$ entre l'étoile et la planète.
- Quelles quantités scalaires et vectorielles sont conservées ? Dire pourquoi (symétrie, ou, à défaut, indiquer le principe de Newton ou la loi de Képler pertinent).
- Il s'ensuit de b) que le mouvement $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ de m est dans un plan, que l'on munit de coordonnées polaires r, θ . Donner le moment cinétique L_O de m autour de M et l'énergie cinétique de m .
- Montrer que l'énergie mécanique s'écrit comme $(1/2) m (dr/dt)^2 + V_{\text{eff}}(r)$. Donner le potentiel radial effectif $V_{\text{eff}}(r)$. Dessiner $V_{\text{eff}}(r)$ et discuter qualitativement (en quelques mots) du mouvement de m (pour une énergie mécanique $E < 0$).
- Montrer que le mouvement circulaire uniforme est un mouvement possible et donner son rayon r en fonction de $\omega = d\theta/dt = 2\pi/T$. Cette relation dépend-elle de m ? de M ? Que vaut v^2/r , où v est la vitesse de la planète ? Dans le système solaire, quelle planète, Mercure ($r = 6 \cdot 10^{10} \text{ m}$), Terre ($r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) ou Neptune ($r = 4,5 \cdot 10^{12} \text{ m}$) a la plus grande vitesse (on suppose leur mouvement circulaire). Que vaut cette vitesse maximale, si la vitesse de la terre est $3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$? Le mouvement de la planète est-il relativiste ($v/c > 0,01$) ? ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide).

Bonus [4]:

- Un autre mouvement possible (d) est elliptique, pour $E < 0$. Donner la vitesse radiale dr/dt , et le moment cinétique au point r_A le plus éloigné de l'étoile (aphélie) et au point r_P le plus rapproché (périhélie). Écrire une équation pour $r = r_A, r_P$ et exprimer le grand axe ($r_A + r_P$) et le produit $r_A r_P$ en fonction de m, M et des paramètres $|E|$ et $L_O = |L_O|$.
- Donner $v_A (v_P)$ en fonction de $r_A (r_P)$ avec les paramètres ci-dessus. Le produit $v_A v_P$ est alors indépendant de M et de L_O . Calculer $v_A v_P (r_A + r_P)/2$, et comparer cette expression avec $v^2 r$ du mouvement circulaire (e).

[Quelques données superflues :

constante de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

masse du soleil $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

3. Questions courtes [3 : 1 (a+b), 2(c)]:

Les transformations suivantes sont-elles canoniques ?

- $Q = p, P = -q$
- $Q = p, P = q$
- Si $P = \omega H$, où H est le hamiltonien et ω est une constante, montrer que $dQ/dt = \omega$, donc $Q = \omega t + \text{cst}$. Que vaut dP/dt ?