

LICENCE SCIENCES 2^{ème} ANNEE
Mentions: Mathématiques-Physique-Chimie

UE25: Examen de Mécanique
Durée 2 heures

Aucun documents n'est autorisé

Exercice 1: Mécanique lagrangienne et hamiltonienne [10 + bonus]

Oscillateur harmonique à deux dimensions (point matériel de masse m , soumis à une force $\vec{F} = -k\vec{r}$).

- Vérifier en coordonnées cartésiennes ($q_1 = x, q_2 = y$) que la force dérive du potentiel $V = \frac{k}{2} \vec{r}^2 = \frac{k}{2} (x^2 + y^2)$.
- La position du point matériel est définie par le vecteur $\vec{r} = \vec{OM}$ dans le plan (x, y) . Ecrire le vecteur position et le vecteur vitesse \vec{v} aussi bien en coordonnées cartésiennes qu'en coordonnées polaires ($q_1 = r, q_2 = \theta$).
- Ecrire le lagrangien \mathcal{L} . Donner les équations du mouvement (Lagrange) dans les deux systèmes de coordonnées.
- Ecrire le hamiltonien \mathcal{H} et les équations du mouvement de Hamilton.
- En coordonnées polaires, donner deux constantes du mouvement (expliquer). Montrer que l'énergie mécanique s'écrit comme $\frac{m}{2} (\frac{dr}{dt})^2 + V_{\text{eff}}(r)$. Donner le potentiel radial effectif $V_{\text{eff}}(r)$, dessiner-le et discuter qualitativement (en quelques mots) la forme du mouvement de m . Notamment, $|\vec{r}| = \text{cst.}$ est-il un mouvement possible?
- Pour un oscillateur harmonique à une dimension, montrer que la transformation $P(p, q) = \frac{p^2}{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (p^2 + \alpha q^2)$, $Q(p, q) = -\arctan(\frac{p}{\sqrt{\alpha}q})$ (avec $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et $\alpha = km$) est une transformation canonique. Ecrire les équations du mouvement de Hamilton et les résoudre. On a une constante du mouvement: laquelle?

(On donne: $(\frac{d}{d\varphi} \arctan \varphi = \frac{1}{1+\varphi^2})$).

[Bonus: La transformation inverse est $p = -\lambda\sqrt{P} \sin Q$, $q = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{P} \cos Q$ (avec $\lambda^2 = 2\sqrt{\alpha}$). Vérifier que la période du mouvement est indépendante de son amplitude. Justifier ce résultat bien connu par considérations de similitude.]

- On repasse à deux dimensions en coordonnées cartésiennes. Montrer (voir f)) que la transformation $P_1(p, q) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (p_1^2 + \alpha q_1^2)$, $Q_1(p, q) = -\arctan(\frac{p_1}{\sqrt{\alpha}q_1})$, (indépendant de p_2, q_2), $P_2(p, q) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (p_2^2 + \alpha q_2^2)$, $Q_2(p, q) = -\arctan(\frac{p_2}{\sqrt{\alpha}q_2})$, (indépendant de p_1, q_1), est canonique (Attention, il faut aussi vérifier que $[Q_1, Q_2] = [Q_1, P_2] = 0$, etc.). Trouver trois constantes du mouvement.

[Bonus: La transformation inverse est $p_k = -\lambda\sqrt{P_k} \sin Q_k$, $q_k = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{P_k} \cos Q_k$, $k = 1, 2$. Calculer le moment cinétique $q_1 p_2 - q_2 p_1$. Est-il conservé (Voir aussi e))?

(On donne: $\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b)$).

Exercice 2: Mécanique de Newton [8]

Un pendule est constitué d'un fil de masse négligeable de longueur ℓ et d'une masse M . Il est initialement au repos, vertical. Ce pendule est heurté horizontalement par une masse m à la vitesse v_0 . Le module de l'accélération de la pesanteur est noté g .

- Le choc est élastique. Quelles (2) quantités sont conservées au cours du choc (ayant la même valeur juste avant et juste après le choc)? Donner la vitesse du pendule juste après le choc. A quelle hauteur h_1 le pendule va-t-il remonter?
- Le choc est mou (le projectile reste encastré dans la masse du pendule, qui a alors une masse $(M+m)$). Quelle quantité est conservée au cours du choc. Donner la vitesse du pendule juste après le choc. A quelle hauteur h_2 le pendule va-t-il remonter?
- Quelle proportion de l'énergie initiale est dissipée lors du choc mou? Lors du choc élastique?
- Ecrire l'équation du mouvement (Newton II) du pendule après le choc. Quelle est la période d'oscillation du pendule (petites oscillations)? Est-elle dépendante de la masse du pendule? Comparer avec les réponses a) et b). Expliquer en quelques mots les différences (s'il y en a).

Questions courtes:

Exercice 3: [2]

Considérer le mouvement de la terre autour du soleil. Il y a 3 ou 2 jours de plus entre l'équinoxe de printemps (15 mars) et l'équinoxe d'automne (15 septembre) qu'entre le 15 septembre et le 15 mars. Dire pourquoi (lois de Képler ou symétrie impliquant la conservation d'une quantité).

Exercice 4: [3 = 1(a+b) + 2(c)]

Les transformations suivantes sont-elles canoniques?

- $Q = p, P = -q$,
- $Q = p, P = q$,
- Si $P = \frac{\mathcal{H}}{\omega}$, où \mathcal{H} est le Hamiltonien et ω une constante, montrer que $dQ/dt = \omega$, donc $Q = \omega t + \text{cst}$. Que vaut dP/dt ?