

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES – LICENCE M.P.C. 2^{ème} ANNÉE
3^{ème} SEMESTRE, 1^{ère} SESSION

22 janvier 2008

Durée : 2 heures

Barème : 100 points

Documents autorisés : uniquement le cours polycopié

Bidules électroniques autorisés : aucun

Enseignant référent : L. Teyssier

Exercice. (20 pts) On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f : (x, y) \neq (0, 0) \mapsto \frac{x^4 - xy^3 - y^4}{x^2 + y^2}$$
$$(0, 0) \mapsto 0.$$

Établir que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Problème 1. (30 pts) L'univers physique est assimilé au plan \mathbb{R}^2 muni des coordonnées cartésiennes (x, y) . On place aux points $A := (1, 0)$ et $B := (-1, 0)$ une charge ponctuelle $q = 4\pi\epsilon_0 > 0$. On veut étudier les points d'équilibre du mouvement d'une particule test chargée avec une charge $q' \neq 0$. On négligera totalement les frottements. On admettra que le potentiel auquel est soumis la particule en un point $M = (x, y)$ du plan vaut

$$V(M) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{AM}\|} + \frac{1}{\|\vec{BM}\|} \right).$$

(1) (8 pts)

- (a) Soit $C := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Déterminer l'expression du gradient de l'application $M \mapsto \frac{1}{\|\vec{CM}\|}$.
- (b) En déduire que pour tout $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\}$ on a

$$\vec{\nabla} V(M) = -q' \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3} - q' \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|^3}.$$

(2) (7 pts) On veut déterminer tous les points d'équilibre du potentiel, c'est-à-dire les points $M_0 = (x, y)$ tels que $\vec{\nabla} V(M_0) = \vec{0}$.

- (a) En projetant $\vec{\nabla} V$ sur l'axe \vec{u}_y montrer que nécessairement $y = 0$.
- (b) Finalement prouver que $M_0 = O = (0, 0)$ est l'unique point d'équilibre du système.

(3) (10 pts) On définit la fonction, donnée par un produit scalaire,

$$S : M \mapsto \vec{\nabla} V(M) \cdot \vec{OM}.$$

Calculer le développement limité de S à l'ordre 2 au point $O = (0, 0)$.

(4) (5 pts) On dit que le point d'équilibre O est stable si $S(M) > 0$ pour tout M proche (mais différent) de O . Montrer que, quelle que soit la valeur de $q' \neq 0$, le point d'équilibre O n'est pas stable.

Quand la clochette tinte, tournez la page...

Problème 2. (60 pts) Le but ici est de déterminer la valeur de

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Pour cela on va étudier la fonction

$$F : x \geq 0 \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(1) (10 pts) **Existence de F .**

- (a) Établir que pour $x > 0$ l'intégrale définie par $F(x)$ est convergente.
- (b) Montrer que pour $A > 0$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

et en déduire que $I = F(0)$ converge également.

(2) (18 pts) **Continuité de F .**

- (a) Rappeler la formule de l'inégalité triangulaire pour les intégrales.
- (b) Soient $x, y > 0$. Établir l'égalité $e^{-x} - e^{-y} = \int_y^x -e^{-u} du$. Conclure alors que

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|.$$

- (c) Grâce à cette inégalité montrer que si $x > y/2$ alors

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq e^{-y/2} |x - y|$$

(on remarquera que $e^{-x} = e^{-y/2} e^{-x+y/2}$).

- (d) En déduire que si $a > 0$ et $x > a/2$ alors

$$|F(x) - F(a)| \leq \frac{2}{a} |a - x|.$$

- (e) Grâce à l'inégalité précédente établir que F est continue sur $]0, +\infty[$. On admettra dans la suite du problème que F est aussi continue en 0.

(3) (12 pts) **Limite en $+\infty$.**

- (a) En étudiant le signe des dérivées des fonctions $\varphi_1 : t \in [0, +\infty[\mapsto t - \sin t$ et $\varphi_2 : t \in [0, +\infty[\mapsto t + \sin t$ montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$|\sin t| \leq t.$$

- (b) Établir finalement que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. Quelle est la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

(4) (10 pts) **Dérivée de F .** Pour $x, t > 0$ on pose

$$H(x, t) := \int_0^t e^{-ux} \sin u du.$$

- (a) Montrer que

$$H(x, t) = \frac{e^{-xt} (\cos t + x \sin t) - 1}{1 + x^2}.$$

- (b) Pour $x > 0$ fixé calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(x, t)$.

- (c) On rappelle la relation :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-tx} \frac{\sin t}{t} \right) dt.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$ on a $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

(5) (10 pts) **Valeur de I .**

- (a) Grâce aux questions (3)(c) et (4)(c) établir l'égalité, valable pour $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

- (b) Finalement donner la valeur de I .