

LICENCE DE SCIENCES 2^{ème} ANNEE.
Mention Chimie

Nom de l'UE : Mathématiques, algèbre linéaire.
Responsable du sujet : Louise Nyssen.
Durée : 1 heure 30.

Ce sujet comporte cinq exercices : n'oubliez pas de tourner la page ! Ils sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : L'application

$$\varphi \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \end{pmatrix} \end{cases}$$

est-elle linéaire ? Pourquoi ?

Exercice 2 : Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 défini par les équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

a. Quelle est la dimension de E ?

b. Donner une base de E .

Exercice 3 : Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et ϕ l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Ecrire la matrice de ϕ dans la base (e_3, e_2, e_1)

b) Ecrire la matrice de ϕ dans la base $(e_1 + e_3, e_2, e_2 - e_3)$

Exercice 4 : Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) , on considère le vecteur $\vec{u}_0 = e_1 + e_2 + e_3$, la droite Δ de vecteur directeur \vec{u}_0 et F , le supplémentaire orthogonal de Δ .

- Déterminer une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ telle que \vec{u} soit dans Δ et que \vec{v} et \vec{w} soient dans F . Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- Soit Φ la rotation d'axe Δ orienté par \vec{u}_0 et d'angle π . Ecrire la matrice B de Φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- Soit A la matrice de Φ dans la base canonique. Quelle est la relation entre A et B ? Calculer A .

Exercice 5 : On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique. Soit Φ l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que Φ est une isométrie.
- Calculer $\text{Ker}(\Phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$. En déduire la nature de cette isométrie (rotation, symétrie orthogonale, ...).
- Déterminer ses éléments caractéristiques : le plan si Φ est une symétrie, l'axe orienté et l'angle si c'est une rotation.