

**ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS
D'UNE SEULE ET DE PLUSIEURS VARIABLES**

Documents et outils électroniques sont interdits.

Durée : 2h.

EXERCICE 1 :

Trouver les solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $Z^4 - 2Z^2 + 2 = 0$.

EXERCICE 2 :

On considère la fonction $f : \begin{matrix} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(2+x) \end{matrix}$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Ces fonctions sont dérivables (donc continues) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- Montrer¹ que l'on a $g(e-2) > 0$ et $g(e^2-2) < 0$.
- Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
- A l'aide des points a), b), c) ci-dessus, conclure qu'il existe exactement une solution α de l'équation $g(x) = 0$ (et donc de l'équation $f(x) = x$) et que l'on a $\alpha \in]e-2, e^2-2[$.

- 2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = \ln(2)$.

- a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a les inégalités $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. A l'aide du théorème des accroissements finis, en déduire que la suite u_n est croissante, et que l'on a pour tout $n \geq 1$ l'inégalité

$$|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2} |\alpha - u_{n-1}|.$$

- b) En déduire l'inégalité $|\alpha - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n |e^2 - 2 - \ln(2)|$.

- c) A partir de quel rang est-on sûr que le terme u_n est une approximation de α à 10^{-3} près²?

Tournez la page.

¹On rappelle l'encadrement $2,718 < e < 2,719$.

²Indications : on a l'égalité $2^{10} = 1024$ et l'inégalité $|e^2 - 2 - \ln(2)| < 2^3$.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{x^4}$.

- Donner (sans justification) les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions $\sqrt{1+x^2}$ et $\cos(x)$.
- Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE 4 :

- Trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'on ait

$$y'(t) = \frac{1}{t}y(t) - t$$

- Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(1) = -2$?

EXERCICE 5 :

- A l'aide du changement de variable $u(x) = \sin(x)$, montrer que l'on a $\int_0^t \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.
- Résoudre l'équation différentielle

$$(A) \quad y'(t) = \cos(y(t)) .$$

- Quelle solution de (A) vérifie la condition initiale $y(0) = 0$?