

**PREMIER CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES**

*Documents et outils électroniques interdits.*

**EXERCICE 1)**

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses (pour tous  $a$  et  $b$  réels strictement positifs et  $m$  et  $n$  entiers) ?

A :  $a^m b^m = (ab)^m$

B :  $(a^m)^n = a^{mn}$

C :  $a^m a^n = a^{mn}$

D :  $a^{-n} = \sqrt[n]{a}$

E :  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

F :  $\ln(a)/\ln(b) = \ln(a - b)$

G :  $\ln(a^m) = m \ln(a)$

H :  $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$

**EXERCICE 2)**

a) Ecrire, sous forme algébrique, les deux racines carrées complexes du nombre  $5 + 12i$  (on pourra utiliser l'égalité  $13^2 = 169$ ).

b) Ecrire, sous forme algébrique, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation

$$Z^2 + 5Z + (5 - 3i) = 0.$$

**EXERCICE 3)**

Calculer successivement les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}).$$

**EXERCICE 4)**

1) On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$$

a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ . Montrer que cette équation admet une unique solution positive (que l'on notera<sup>1</sup>  $\varphi$ ), et que l'on a l'encadrement  $\frac{3}{2} < \varphi < 3$ .

b) Montrer que si  $x$  est un élément de  $[\frac{3}{2}, 2]$ , alors  $f(x)$  est aussi un élément de  $[\frac{3}{2}, 2]$ .

c) Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $[\frac{3}{2}, 2]$ , alors on a l'inégalité  $|xy| \geq \frac{9}{4}$ . En déduire que sous les mêmes hypothèses, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9} |x - y|.$$

2) On considère la suite  $(u_n)_n$  définie par la condition initiale  $u_0 = 2$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

a) Montrer, en utilisant 1)c) que pour tout  $n$ , on a  $|u_n - \varphi| \leq \frac{4}{9} |u_{n-1} - \varphi|$ .

b) En déduire, en usant d'un raisonnement par récurrence, que pour tout  $n \geq 0$  on a :

$$|u_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \varphi|.$$

c) Conclure que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $\varphi$ .

d) En utilisant 2)b), trouver un rang au delà duquel on est sûr que  $u_n$  est une approximation<sup>2</sup> de  $\varphi$  à  $10^{-3}$  près, puis un rang au delà duquel on est sûr que  $u_n$  est une approximation de  $\varphi$  à  $10^{-6}$  près.

<sup>1</sup>Ce nombre  $\varphi$  est connu sous le nom de nombre d'or

<sup>2</sup>On pourra utiliser les inégalités  $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ ,  $|u_0 - \varphi| < \frac{1}{2}$ , et  $(\frac{1}{2})^{10} < 10^{-3}$