

**ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS
D'UNE SEULE ET DE PLUSIEURS VARIABLES**

Documents et outils électroniques sont interdits.

Durée : 2h.

EXERCICE 1 :

On considère les deux nombres complexes

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

- Ecrire z_1 sous forme exponentielle et z_2 sous forme algébrique.
- En déduire la forme exponentielle et la forme algébrique du produit $z_1 \cdot z_2$.
- Que valent $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$?

EXERCICE 2 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{(1-x^2)}$.

- Donner (sans justification) les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions $\sqrt{1-x^2}$ et $\cos(x)$, et $\frac{1}{1-x^2}$.
- Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction f .
- Calculer la limite du quotient $\frac{f(x)}{x^4}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE 3 :

- 1) a) Résoudre l'équation différentielle

$$(EH) \quad y'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \cdot y(t).$$

- b) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \cdot y(t) + 1.$$

- c) Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(0) = 2$?

Tournez la page.

EXERCICE 4 :

On considère dans cet exercice l'équation différentielle autonome (à variables séparables)

$$(A) \quad y'(t) = \cos(y(t)) .$$

On admettra que pour toute valeur $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cette équation admet une unique solution $y : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ satisfaisant à la condition initiale $y(0) = \alpha$. Le but de cet exercice est de trouver la forme explicite de cette solution.

1) On note U l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f fonction définie sur U par $f(t) = \frac{1}{\cos(t)}$.

a) Tracer, sans donner de détails, le graphe de f sur U .

b) A l'aide du changement de variable $u(x) = \sin(x)$, montrer que l'on a, pour $t \in U$, l'égalité

$$\int_0^t \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right) .$$

c) Soit F la fonction définie sur U par $F(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right)$. Calculer les limites

$$\lim_{t \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} F(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(t) .$$

d) Tracer, sans donner de détails, le graphe de F sur U .

2) a) Montrer que si $y : \mathbb{R} \rightarrow U$ est une solution de (A), alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que l'on ait l'égalité

$$F(y(t)) = t + C .$$

b) Si la condition initiale $y(0) = \alpha$ est donnée, que vaut C ?

c) A l'aide des questions 2)a) et 1)d), tracer, sans donner de détails, quelques solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow U$ de (A).

d) Dédurre de 2)a) que si $y : \mathbb{R} \rightarrow U$ est une solution de (A), alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ telle que l'on ait l'égalité

$$y(t) = \arcsin \left(\frac{\lambda e^{2t} - 1}{\lambda e^{2t} + 1} \right)$$

e) Si la condition initiale $y(0) = \alpha$ est donnée, que vaut λ ?

• En particulier, si la condition initiale est $y(0) = \frac{\pi}{8}$ est donnée, que vaut λ ?

• Et si la condition initiale est $y(0) = \frac{\pi}{12}$ (cf. exo 1) ?