

**ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS
D'UNE SEULE ET DE PLUSIEURS VARIABLES**

Documents et outils électroniques sont interdits.

Durée : 2h.

EXERCICE 1 :

- a) Donner, sous forme algébrique, les deux racines carrées du nombre complexe $\Delta = 3 + 4i$.
b) Donner, sous forme algébrique, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$Z^2 + iZ - 1 - i = 0 .$$

EXERCICE 2 :

1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto 2 + \frac{1}{x} .$$

- a) Montrer que si x est un élément de $[2, 3]$, il en va de même de $f(x)$.
b) Montrer que si c est un élément de $[2, 3]$, on a $|f'(c)| \leq \frac{1}{4}$.
c) On pose $\ell = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que ℓ est l'unique solution dans $[2, 3]$ de l'équation $f(x) = x$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = 3$.

- a) En utilisant la question 1)a), montrer que pour tout n on a $u_n \in [2, 3]$.
b) En utilisant la question 1)b) et le théorème des accroissements finis, ainsi que la propriété de ℓ mise en évidence dans 1)c), montrer que l'on a pour tout n l'inégalité

$$|\ell - u_n| \leq \frac{1}{4} |\ell - u_{n-1}| .$$

- c) En déduire l'inégalité $|\ell - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
d) A partir de quel rang est-on sûr que le terme u_n est une approximation de ℓ à 10^{-3} près¹?

Tournez la page.

¹On rappelle l'égalité $2^{10} = 1024$.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$.

- a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- b) Donner (sans justification) les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions e^x et $\cos(x)$.
- c) Donner (avec justification) le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction f .
- d) Citer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0.
- e) Dédire des questions c) et d) la valeur de $f^{(3)}(0)$.
- f) En utilisant la question c), déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} .$$

EXERCICE 4 :

- a) Calculer une primitive de la fonction $t \mapsto te^t$.

- b) Résoudre l'équation différentielle

$$(EH) \quad y'(t) = ty(t) .$$

- c) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = ty(t) + te^{\frac{t^2}{2} + t} .$$

- d) Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(0) = 2$?

EXERCICE 5 :

- a) Calculer une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{1}{4+u^2}$.

- b) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = (4 + y(t)^2) \cos(t) .$$

- c) Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(0) = 2$?