

MATHÉMATIQUES RENFORCÉS - EXAMEN
5 SEPTEMBRE 2008

Exercice 1. Dans le plan euclidien équipé d'un système de repère fixé, soit r la droite qui passe par $P = (1, 2)$ et $Q = (5, 1)$, et soient $s_1 = \{(x, 3-x), x \in \mathbb{R}\}$ et $s_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 = 0\}$.

- (1) Écrivez l'équation de r sous la forme $ax + by + c = 0$.
- (2) Trouvez $U = r \cap s_1$, $V = r \cap s_2$ et $W = s_1 \cap s_2$.
- (3) Trouvez le barycentre G du quadrilatère $OUVW$ (où $O = (0, 0)$).
- (4) Soient B_1, B_2, B_3, B_4 les barycentres respectivement des triangles OGV , VGW , WGU et UGO . Est-il vrai que G est le barycentre de $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$?
- (5) Est-ce que l'énoncé du point précédent est vrai en général ? Plus explicitement : si U, V, W, O sont des points génériques, G est leur barycentre et B_1, \dots, B_4 sont comme défini comme avant, est-il vrai que G est aussi le barycentre de $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$?

Exercice 2. Dans le plan complexe soit C le cercle de rayon 1 et centre 0.

- (1) Soit P_n un polygone régulier à n -sommets inscrit dans C . Si $v \in P_n$ est un sommet de P_n , écrivez la liste de tous les sommets de P_n en fonction de v en utilisant les nombres complexes.
- (2) Décrivez l'image par l'inversion de centre 0 et rayon 1 d'une des droites qui contiennent les arêtes de P_n . De quel type de courbe s'agit-il ? Quelles sont ses intersections avec C ?
- (3) Pour quels valeurs de n existe-t-il une fonction f de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ qui envoie 4 sommets consécutifs de P_n respectivement sur $1, i, -1, -i$?

Exercice 3. Soit $P(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1$.

- (1) Trouvez $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$, $\vec{(a, b)} \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$ telles que l'équation $P(x, y) = 0$ s'écrive sous la forme

$$\overrightarrow{(x, y)}^t \cdot A \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + 2 \cdot \overrightarrow{(a, b)}^t \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + c = 0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard et les vecteurs sont considérés comme colonnes.

- (2) Trouvez $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $P_1(x - x_0, y - y_0)$ ne contient pas de termes de degré 1 en x et y .
- (3) Trouvez les valeurs propres λ_+ et λ_- de A (avec $\lambda_+ \geq \lambda_-$).
- (4) Trouvez une matrice $M \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ telle que $MM^t = Id$ et $M^t A M$ soit diagonale.
- (5) Quel type de conique est représentée par $P_1(x, y) = 0$?
- (6) Calculez les axes de la conique représentée par $P_1(x, y) = 0$.