

Licence — 1^{re} année
UE méthodologie des mathématiques

Durée : 1 heure
Document autorisé : néant (aucun document n'est autorisé)

Avertissement

Les réponses doivent être reportées sur le feuillet prévu à cet effet en noircissant soigneusement — voir l'exemple donné en haut à droite du feuillet de réponses — les cases qui correspondent, selon vous, à la (aux) bonne(s) réponse(s).

Ne répondez pas au hasard : pour chaque question, une réponse correcte (c'est-à-dire pour laquelle tous les choix corrects ont été noircis) rapporte un point tandis qu'une réponse erronée, au contraire, pénalise d'un point. Une question à laquelle aucune réponse (ou une réponse partielle parmi les propositions correctes) n'est donnée ne pénalise pas.

EXERCICE 1. Un enseignant décide d'organiser un QCM pour l'examen final. Pour simplifier (ce n'est pas le cas pour le QCM que vous êtes en train de faire), on suppose que pour chacune des vingt questions que comporte l'examen, les candidats ont le choix parmi quatre réponses et qu'une seule de ces réponses est correcte. Une réponse correcte rapporte un point, une réponse incorrecte, comme l'absence de réponse, ne pénalise pas (mais ne rapporte aucun point).

Un étudiant qui n'a pas suivi le cours et qui se présente tout de même à l'examen décide de répondre au hasard à toutes les questions en choisissant avec équiprobabilité l'une des quatre propositions.

Qa 1. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'étudiant a bien répondu à la question qui porte le numéro i et qui vaut 0 sinon. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

- A. X_i suit une loi binomiale de paramètres 20 et $1/4$.
- B. X_i suit une loi binomiale de paramètres 20 et $3/4$.
- C. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $i/4$.
- D. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - i/4$.
- E. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$.
- F. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $3/4$.
- G. X_i vérifie la propriété suivante :

$$P[X_i = 1] = 1/4 \quad \text{et} \quad P[X_i = 0] = 3/4.$$

Qa 2. Quelle est la valeur exacte de l'espérance de chaque X_i ?

- A. $3/4$.
- B. $1/4$.
- C. 5.
- D. 15.
- E. $i/4$.

F. $3i/4$.

G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 3. Quelle est la valeur exacte de la variance de chaque X_i ?

A. $3/16$.

B. $1/16$.

C. 0,19.

D. 0,187 5.

E. 0,062 5.

F. 0,06.

G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 4. On note Y la variable aléatoire qui représente le nombre total de réponses correctes formulées par le candidat. Quelles sont les propositions vraies parmi les suivantes ?

A. Y suit une loi normale dont on peut calculer les paramètres.

B. Y suit une loi de Poisson dont on peut calculer le paramètre.

C. Y suit une loi de Bernoulli dont on peut calculer le paramètre.

D. Y suit une loi binomiale dont on peut calculer les paramètres.

E. La formule suivante est vraie :

$$Y = \sum_{i=1}^{20} iX_i.$$

F. La formule suivante est vraie :

$$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i.$$

Qa 5. Quelle est la valeur exacte de l'espérance de Y ?

A. 0.

B. 5.

C. 15.

D. $1/4$.

E. $3/4$.

F. On ne peut pas calculer cette valeur : il manque des informations dans l'énoncé du problème.

G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 6. Quelle est la valeur exacte de la variance de Y ?

A. 1.

B. $15/4$.

C. $15/16$.

D. $3/4$.

E. $3/16$.

F. 3,5.

G. 3,75.

H. 0,937 5.

I. On ne peut pas calculer cette valeur : il manque des informations dans l'énoncé du problème.

J. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

*
* *

EXERCICE 2. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100%. Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99,9 fois sur 100. Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. On suppose que 2 personnes sur 1000, dans la population, sont atteintes par cette maladie.

On choisit au hasard (avec équiprobabilité) une personne dans la population à qui l'on fait subir le test et l'on considère les événements suivants :

- M : « la personne est malade » ;
- T : « le test est positif ».

Qa 7. D'après l'énoncé, quelle est la valeur de $P[M]$?

- A. 999/1000.
- B. 2/1000.
- C. 1/1000.
- D. 4/1000.
- E. 996/1000.
- F. 998/1000.
- G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 8. D'après l'énoncé, a-t-on ?

- A. $P[T|M] = 999/1000$.
- B. $P[T|M] = 2/1000$.
- C. $P[T|M] = 1/1000$.
- D. $P[T|M] = 4/1000$.
- E. $P[T|M] = 996/1000$.
- F. $P[T|M] = 998/1000$.
- G. $P[M|T] = 999/1000$.
- H. $P[M|T] = 2/1000$.
- I. $P[M|T] = 1/1000$.
- J. $P[M|T] = 4/1000$.
- K. $P[M|T] = 996/1000$.
- L. $P[M|T] = 998/1000$.
- M. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 9. On note \bar{M} l'événement contraire à M . Quelle information fournit l'énoncé ?

- A. $P[T|\bar{M}] = 999/1000$.
- B. $P[T|\bar{M}] = 2/1000$.
- C. $P[T|\bar{M}] = 1/1000$.
- D. $P[T|\bar{M}] = 4/1000$.
- E. $P[T|\bar{M}] = 996/1000$.
- F. $P[T|\bar{M}] = 998/1000$.
- G. $P[\bar{M}|T] = 999/1000$.
- H. $P[\bar{M}|T] = 2/1000$.
- I. $P[\bar{M}|T] = 1/1000$.
- J. $P[\bar{M}|T] = 4/1000$.
- K. $P[\bar{M}|T] = 996/1000$.
- L. $P[\bar{M}|T] = 998/1000$.

M. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 10. On fait subir le test à personne et celui-ci s'avère positif. Quelle est la probabilité pour que cette personne soit effectivement malade ?

- A. 999/2995.
- B. 997/2995.
- C. 998/2995.
- D. 999/5990.
- E. 998/5990.
- F. 997/5990.
- G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 11. Comment note-t-on, mathématiquement, la probabilité calculée à la question précédente ?

- A. $P[T|M]$.
- B. $P[T|\bar{M}]$.
- C. $P[M|T]$.
- D. $P[T|\bar{T}]$.

*
* *

EXERCICE 3. Soit a un réel positif. On considère la fonction suivante :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} a \exp(x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Qa 12. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle une densité ? (Remarque : on note $e = \exp(1)$).

- A. $a = 1$.
- B. $a = 0$.
- C. $a = \pi$.
- D. $a = 1/\pi$.
- E. $a = e - 1$.
- F. $a = 1/(e - 1)$.
- G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 13. On considère une variable aléatoire X dont la densité est cette fonction f . Quelle est l'espérance de X ?

- A. 0.
- B. 1.
- C. $e - 1$.
- D. $\frac{1}{e - 1}$.
- E. $1 - e$.
- F. $\frac{1}{1 - e}$.
- G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 14. Quelle est la variance de X ?

- A. -1.

- B. 0.
 C. $\frac{e-2}{e-1}$.
 D. $\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$.
 E. $\frac{e-2}{(e-1)^2}$.
 F. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

*
* *

EXERCICE 4. Une entreprise fabrique des allumettes à l'aide d'une machine réglée de telle manière que la taille (mesurée en mm) des allumettes produites suit une loi normale de paramètres μ inconnu et $\sigma^2 = 81$. On souhaite estimer le paramètre μ puis donner pour ce paramètre un intervalle de confiance au niveau 97%. Pour cela, on réalise 10 observations reportées dans le tableau ci-dessous :

27	41	49	46	43	39	42	54	41	26
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Qa 15.** Que représente le paramètre μ ?
 A. La taille maximale qu'une allumette produite peut mesurer.
 B. La taille minimale qu'une allumette produite peut mesurer.
 C. L'espérance mathématique de la taille des allumettes produites.
 D. La variance de la taille des allumettes produites.
 E. L'écart-type de la taille des allumettes produites.
 F. Rien de spécial. C'est un paramètre théorique.
- Qa 16.** Que représente le paramètre σ^2 ?
 A. La taille maximale qu'une allumette produite peut mesurer.
 B. La taille minimale qu'une allumette produite peut mesurer.
 C. L'espérance mathématique de la taille des allumettes produites.
 D. La variance de la taille des allumettes produites.
 E. L'écart-type de la taille des allumettes produites.
 F. Rien de spécial. C'est un paramètre théorique.
- Qa 17.** Quelle est, ici, la valeur de l'estimateur $\hat{\mu}_n$ vu en cours ?
 A. 26.
 B. 54.
 C. 408.
 D. 40,8.
 E. 2,6.
 F. 5,4.
 G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 18. On note Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et réduite. On considère $0 < \alpha < 1$ et l'on note s_α tel que :

$$P[|Z| \leq s_\alpha] \geq 1 - \alpha.$$

Quelle est la forme, vue en cours, d'un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$, si l'on a réalisé n observations et construit l'estimateur $\hat{\mu}_n$?

- A. $\left[\frac{\sigma^2 \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} - \hat{\mu}_n; \hat{\mu}_n + \frac{\sigma^2 \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$.
- B. $\left[\hat{\mu}_n - \frac{\sigma^2 \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}}; \hat{\mu}_n + \frac{\sigma^2 \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$.
- C. $\left[\hat{\mu}_n - \frac{\sigma \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}}; \hat{\mu}_n + \frac{\sigma \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$.
- D. $\left[\frac{\sigma \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} - \hat{\mu}_n; \hat{\mu}_n + \frac{\sigma \cdot s_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$.

Qa 19. À l'aide du tableau disponible à la fin du sujet (identique à celui distribué en cours), quelle valeur de s_α faut-il choisir dans le cadre de notre problème ?

- A. 1,57.
- B. 1,58.
- C. 1,95.
- D. 1,96.
- E. 2,15.
- F. 2,16.
- G. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Qa 20. Quel est, parmi les intervalles suivants, celui qui est un intervalle de confiance pour μ au niveau exigé ?

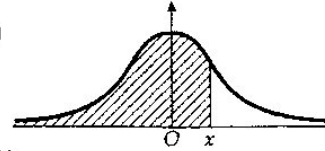
- A. $[39,56; 48,25]$.
- B. $[34,25; 36,88]$.
- C. $[34,71; 36,17]$.
- D. $[34,62; 46,98]$.
- E. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

*
* *

FIN

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Table de la fonction de répartition



► Probabilité d'avoir une valeur inférieure à x :

$$\Pi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

► Pour $x < 0$, prendre le complément à 1 de la valeur lue dans la table pour $-x$:

$$\Pi(x) = 1 - \Pi(-x)$$

Table pour les grandes valeurs de x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,3
$\Pi(x)$	0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99993	0,99997	0,99999