

**ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS
D'UNE SEULE ET DE PLUSIEURS VARIABLES**

Documents et outils électroniques sont interdits.

Durée : 2h.

EXERCICE 1 :

- a) Donner, sous forme algébrique, les deux racines carrées du nombre complexe $\Delta = 4 + 4i$.
b) Donner, sous forme algébrique, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$Z^2 + 2Z - i = 0 .$$

EXERCICE 2 :

On considère la fonction $f : \begin{matrix} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(2+x) \end{matrix}$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Ces fonctions sont dérivables (donc continues) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- 1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
b) Montrer¹ que l'on a $g(e-2) > 0$ et $g(e^2-2) < 0$.
c) Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
d) A l'aide des points a), b), c) ci-dessus, conclure qu'il existe exactement une solution α de l'équation $g(x) = 0$ (et donc de l'équation $f(x) = x$) et que l'on a $\alpha \in]e-2, e^2-2[$.

- 2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = \ln(2)$.

- a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a les inégalités $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. A l'aide du théorème des accroissements finis, en déduire que la suite u_n est croissante, et que l'on a pour tout $n \geq 1$ l'inégalité

$$|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2} |\alpha - u_{n-1}| .$$

- b) En déduire l'inégalité $|\alpha - u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |e^2 - 2 - \ln(2)|$.
c) A partir de quel rang est-on sûr que le terme u_n est une approximation de α à 10^{-3} près² ?

Tournez la page.

¹On rappelle l'encadrement $2,718 < e < 2,719$.

²Indications : on a l'égalité $2^{10} = 1024$ et l'inégalité $|e^2 - 2 - \ln(2)| < 2^3$.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$.

- a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- b) Donner (sans justification) les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions e^x et $\cos(x)$.
- c) Donner (avec justification) le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction f .
- d) Citer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0.
- e) Dédire des questions c) et d) la valeur de $f^{(3)}(0)$.
- f) En utilisant la question c), déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} .$$

EXERCICE 4 :

- a) Calculer une primitive de la fonction $t \mapsto te^t$.
- b) Résoudre l'équation différentielle

$$(EH) \quad y'(t) = ty(t) .$$

- c) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = ty(t) - te^{\frac{t^2}{2} + t} .$$

- d) Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(0) = 2$?

EXERCICE 5 :

- a) Calculer une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{1}{9+u^2}$.
- b) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = (9 + y(t)^2) \cos(t) .$$

- c) Quelle solution de (E) vérifie la condition initiale $y(0) = 3$?